Indications et éléments de correction, feuille d'exercices n° 06 (Déterminants, séries numériques)

Exercice 3

1) $D_1 = 3$, $D_2 = 7$, $D_3 = 15$.

2) Développer par rapport à la première ligne, puis dans le deuxième déterminant qui apparaît.

3) $D_4 = 31$, $D_5 = 63$.

4) On montre par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = 2^{n+1} - 1$.

.

Exercice 4

$$\mathscr{F}_{a,b,c} = \left(X^2 - 2aX + a^2, X^2 - 2bX + b^2, X^2 - 2cX + c^2\right)$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\mathscr{F}_{a,b,c}) = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\det{}_{(1,X,X^2)}(\mathscr{F}_{a,b,c}) = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(b-a)(c-a)(c-b).$$

Ainsi, $\mathscr{F}_{a,b,c}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si a, b, c sont distincts deux à deux.

Exercice 5

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) = \begin{pmatrix} 1+t & t & t & t \\ t & 1+t & t & t \\ t & t & 1+t & t \\ t & t & t & 1+t \end{pmatrix}$$

donc

$$\det{}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) = \begin{vmatrix} 1+t & t & t & t \\ t & 1+t & t & t \\ t & t & 1+t & t \\ t & t & t & 1+t \end{vmatrix} = 4t + 1$$

Cette famille est donc une base de E si et seulement si $t \neq -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 6

1) $\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) $\det(v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, donc v n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7

1) $\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

2) $\det(v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, donc v n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

3) $\det(w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc w est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 8

1) DIV ($\frac{n}{n+1} \sim \frac{1}{n}$)

2) CV (astuce du $\times n^2$)

3) CV (majoration)

4) DIV (grossièrement)

5) CV ($\sin\left(\frac{1}{n}^2\right) \sim \frac{1}{n^2}$)

6) DIV (grossièrement)

7) CV ($\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$)

8) DIV (grossièrement, écrire $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$)

9) CV ($1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$)

10) CV ($\ln(1+\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$)

11) DIV (minoration)

12) CV ($\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \sim \frac{2}{n^2}$)

13) DIV ($\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}$)

14) CV ($\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \sim \mathrm{e}^{-n+\frac{1}{2}}$)

Exercice 9

1) Étudier la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0, \pi]$, en dresser le tableau de variations. Conclure à part pour $x > \pi$?

2) Montrer par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3) Utiliser le théorème de limite monotone pour l'existence. Passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour obtenir que la limite ℓ vérifie $\ell = \sin(\ell)$, et dans l'inégalité $u_n \geqslant 0$ pour obtenir $\ell \geqslant 0$.

4) **a)** $u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$, licite car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On obtient : $u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$, donc $u_n - u_{n+1} \sim \frac{u_n^3}{6}$, donc $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$.

b) Par le lien suites-séries, la série $\sum u_n - u_{n+1}$ converge : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} u_0.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n^3$ coverge.

5) On a $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. De même,

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} u_0.$$

Ainsi, $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

6) a)

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2),$$

donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim -\dfrac{u_n^2}{6}$.

b) Ainsi, $u_n^2 \sim -6\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n^2$ diverge.

Comme, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 10 Cela vaut, sous réserve de convergence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k}$. On reconnaît une série géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$, qui converge donc. On a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Exercice 11

1) Non : on aurait $\det(f)^2 = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^{\dim(E)} = -1$.

2) Oui.

Cas $n = 2$: prendre f dont une matrice est $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cas $n = 2p$ (plus difficile, pas forcément attendu) : prendre f dont une matrice est, par blocs, $\mathrm{Diag}(R, \ldots, R)$.

Exercice 12

1) Théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$

2) Compléter une base de $\mathrm{Ker}(u)$ en une base de E.

3) Immédiat quand on écrit la matrice de u dans cette base.

Exercice 13 $u_n = (1+a+b)\ln n + a\ln(1+1/n) + b\ln(1+2/n) = (1+a+b)\ln n + \dfrac{a+2b}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Si $1+a+b \neq 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $1+a+b = 0$ mais $a+2b \neq 0$, $u_n \sim \dfrac{a+2b}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann.
Pour avoir convergence il faut donc avoir $1+a+b = a+2b = 0$, i.e. $a = -2$ et $b = 1$.
Cette condition est suffisante : si $a = -2$ et $b = 1$, $u_n = \ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) = (\ln n - \ln(n+1)) - (\ln(n+1) - \ln(n+2))$. La série est donc télescopique : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = -\ln 2 - \ln(N+1) + \ln(N+2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln 2$.