# Feuille d'exercices n° 07 : **Séries numériques (suite)**

TSI 2 – Mathématiques

Lycée Gustave Eiffel

Année 2026/2027 – Semaine du 2 novembre

# Exercice 1 (Lundi 09/11)

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

On admet que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n}{n!}$.

# Exercice 2 (Vendredi 11/11)

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$, lorsque $u \to 0$.
2. Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

# Exercice 3

Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge absolument ou non, et si elle converge ou non.

1. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
3. $\sum \frac{\sin(n)}{n^2 \ln(n)}$
4. $\sum \frac{\cos(n\pi)}{n \ln(n)}$
5. $\sum (-1)^n \sqrt{n}$
6. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

# Exercice 4

Étudier la nature de chacune des séries suivantes.

1. $\sum n^n \mathrm{e}^{-n^2}$
2. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$
3. $\sum \dfrac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$

# Exercice 5

En procédant par comparaison série-intégrale, étudier la nature des séries suivantes.

1. $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$
2. $\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$
3. $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

# Exercice 6

En procédant par comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de chacun des termes suivants, lorsque $N \to +\infty$.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln^2(n)$

# Exercice 7

Pour $a > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Déterminer la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Simplifier l'expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq \mathrm{e}$.
3. On se place maintenant dans le cas $a = \mathrm{e}$.
   - 3.1 Calculer un développement asymptotique à deux termes de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   - 3.2 En déduire que si $n$ est suffisamment grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
   - 3.3 Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum u_n$ ?

# Exercice 8

1. Justifier que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge. Converge-t-elle absolument ?
2. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ :
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
4. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

# Exercice 9

Pour $\alpha > 1$, on considère $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Pourquoi $\zeta(\alpha)$ est-il bien défini pour $\alpha > 1$ ?
2. Proposer (et justifier) un encadrement de $\zeta(\alpha)$ vrai pour tout $\alpha > 1$.
3. En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 1 par valeurs supérieures. Traduire ceci par un équivalent.

# Exercice 10

Soit $f : [n_0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et telle que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$ converge.
*Indication* : on pourra établir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

# Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

1. Exprimer $M_{n+1}$ en fonction de $M_n$, de $n$ et de $\ln(n+1)$.
2. Comparer $\ln(n+1)$ et $M_n$.
3. En déduire une comparaison entre $M_n$ et $M_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

# Exercice 12

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum u_n$, où

$$u_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}.$$