Feuille d'exercices n° 07 : **Séries numériques (suite)**

Exercices à préparer

Exercice 1 (Lundi 09/11)

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument.

On admet que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\,x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n!}$.

Exercice 2 (Vendredi 11/11)

1) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$, lorsque $u \to 0$.

2) Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercices élémentaires

Exercice 3 Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge absolument ou non, et si elle converge ou non.

1) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

2) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

3) $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2\ln(n)}$

4) $\sum \dfrac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$

5) $\sum (-1)^n\sqrt{n}$

6) $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$

Exercice 4 Étudier la nature de chacune des séries suivantes.

1) $\sum n^n \mathrm{e}^{\,-n^2}$

2) $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

3) $\sum \dfrac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$

Exercice 5 En procédant par comparaison série-intégrale, étudier la nature des séries suivantes.

1) $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$

2) $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$

3) $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Exercice 6 En procédant par comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de chacun des termes suivants, lorsque $N \to +\infty$.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln^2(n)$

Exercice 7 Pour $a > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1) Déterminer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Simplifier l'expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq \mathrm{e}$.

3) On se place maintenant dans le cas $a = \mathrm{e}$.

a) Calculer un développement asymptotique à deux termes de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) En déduire que si n est suffisamment grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

c) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 8

1) Justifier que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge. Converge-t-elle absolument ?

2) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

4) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercices plus avancés

Exercice 9 Pour $\alpha > 1$, on considère $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1) Pourquoi $\zeta(\alpha)$ est-il bien défini pour $\alpha > 1$?

2) Proposer (et justifier) un encadrement de $\zeta(\alpha)$ vrai pour tout $\alpha > 1$.

3) En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers 1 par valeurs supérieures. Traduire ceci par un équivalent.

Exercice 10 Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et telle que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

2) En déduire que la série $\sum f(n)$ converge.

3) Montrer que la série $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.

Indication : on pourra établir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

1) Exprimer M_{n+1} en fonction de M_n, de n et de $\ln(n+1)$.

2) Comparer $\ln(n+1)$ et M_n.

3) En déduire une comparaison entre M_n et M_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 12 Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum u_n$, où

$$u_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$