V Séries numériques

1 Séries, convergence et divergence

Considérons une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Étudier la série $\sum u_n$, c'est étudier le processus sommatoire associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela se formalise dans les définitions suivantes.

Définition 1.0.1.
Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle N^{e} *somme partielle* de la série le nombre

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Remarque 1.0.2.
Dans tous les énoncés du cours, on supposera que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On verra que, dans certains cas, on fera commencer les sommes à un autre entier que 0. Par exemple, les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n}$ sont de la forme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Exercice 1.0.3.
Calculer les sommes partielles de $\sum n$ et de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Indication : pour la deuxième série, déterminer deux nombres a et b vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

Définition 1.0.4.
Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe. Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles admet une limite finie, on dit que $\sum u_n$ est *convergente*. Dans ce cas, on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

que l'on appelle *somme* de la série, et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit le *reste d'ordre N* de la série comme

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\sum u_n$ est *divergente*. Le fait d'être convergente ou divergente est appelé la *nature* de la série $\sum u_n$.

Exercice 1.0.5.
Étudier la nature de chacune des séries $\sum n$ et $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Le cas échéant, donner l'expression de leurs sommes et de leurs restes.

Remarque 1.0.6.
Le reste d'une série n'a de sens que pour les séries convergentes. On peut écrire, uniquement dans ce cas :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \\ &= S_N + R_N.\end{aligned}$$

Remarque 1.0.7.
Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on a donc $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Comme $\left|S_N - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = |R_N|$, si $|R_N| \leqslant \varepsilon$, alors S_N est une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à ε près.

Définition 1.0.8 (série géométrique)**.**
Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ est appelée *série géométrique* de raison q.

Rappel 1.0.9 (sommation géométrique, fondamental)**.**
Soit $q \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$. Si $q \neq 1$, la somme partielle d'ordre N de la série géométrique $\sum q^n$ est

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Si $q = 1$, la somme partielle d'ordre N de la série géométrique $\sum q^n$ est

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1.$$

Proposition 1.0.10 (fondamental)**.**
Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

Démonstration.
Si $q = 1$, le rappel précédent montre immédiatement que la série $\sum q^n$ diverge.

Supposons $q \neq 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{\text{constante}} - \underbrace{\frac{q^{N+1}}{1-q}}_{\text{géométrique}}.$$

Le premier terme est une constante, le second est le terme général d'une suite géométrique de raison q, donc converge vers 0 si $|q| < 1$, et diverge si $|q| \geqslant 1$. On obtient donc que la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si $|q| < 1$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

et donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre N vaut

$$\frac{1}{1-q} - \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

□

Remarque 1.0.11 (très utile)**.**
Les deux formules précédentes peuvent être résumées en : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$ vérifiant $|q| < 1$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}.$$

Cette formule est même valide lorsque $p < 0$, quand $q \neq 0$.

Proposition 1.0.12 (linéarité)**.**
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exercice 1.0.13.
Quelle est la nature de la série $\sum(2^{-n+1} + 3^{-n-1})$? Si elle converge, calculer sa somme.

Exercice 1.0.14.
Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, soit $p \in \mathbb{N}$.

À partir de la formule donnant $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, obtenir celle donnant $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n$ par décalage d'indices.

Remarque 1.0.15.
On peut faire une combinaison linéaire de termes généraux de séries divergentes et obtenir une série convergente. Par exemple, il est évident que $n - n = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente, alors que la série $\sum n$ diverge.

Exercice 1.0.16 (règle CV+DIV=DIV)**.**
Soit $\sum u_n$ une série convergente et $\sum v_n$ une série divergente. Montrer que la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Exercice 1.0.17.
Étudier la nature de la série $\sum(n + 3^{-n})$.

Proposition 1.0.18.
Soit $\sum u_n$ une série. Si $\sum u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par contraposée, une série $\sum u_n$ pour laquelle le terme général ne tend pas vers 0 est divergente : on dira qu'elle est *grossièrement divergente*.

Démonstration.
On suppose $\sum u_n$ convergente. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n.$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, chacune des deux sommes partielles converge vers la somme de la série, u_N tend donc vers 0. □

Remarque 1.0.19.
Attention ! Une série peut être divergente sans être grossièrement divergente (voir l'exercice 1.0.22) !

Proposition 1.0.20 (lien suite-série)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Démonstration.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N = u_0 + \sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1} - u_n).$$

Cela permet de conclure. □

Remarque 1.0.21.
En pratique, on reviendra au calcul effectif des sommes partielles lorsque l'on remarquera une sommation télescopique.

Exercice 1.0.22.
Simplifier l'expression de $\ln(n+1) - \ln(n)$.

En déduire la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2 Séries à termes positifs

Dans toute cette partie, on s'intéresse à des séries $\sum u_n$ dont le terme général est réel positif, *i.e.* pour lesquelles on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

2.1 Généralités

Lemme 2.1.1.
Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est croissante.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}$, alors, en notant S_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum u_n$, on a

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = u_{N+1} \geqslant 0.$$

□

Proposition 2.1.2.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des ses sommes partielles est majorée, *i.e.* si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant M.$$

Démonstration.
La suite des sommes partielles est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente si et seulement si elle est majorée. □

Remarque 2.1.3.
Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs et est convergente, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2.2 Comparaisons de séries à termes positifs

Théorème 2.2.1 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, version $\leqslant$)**.**
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

1. Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. De plus, dans ce cas,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. Si $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum v_n$ est divergente.

Démonstration.
On commence par remarquer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n.$$

1. Dans ce cas, les sommes partielles de $\sum v_n$ sont majorées, donc celles de $\sum u_n$ le sont également par transitivité. Et on conclut par passage à la limite dans les inégalités.
2. Dans ce cas, les sommes partielles de $\sum u_n$ ne sont pas majorées, donc celles de v_n ne le sont pas non plus. □

Remarque 2.2.2.
Pour utiliser ce théorème, on doit d'abord établir une inégalité. Il y a trois inégalités que l'on utilise souvent (la première est à connaître, c'est la plus utile) :

1. pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$;
2. pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$;
3. pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Exercice 2.2.3.
Démontrer les trois inégalités précédentes.

Exercice 2.2.4.
En utilisant les résultats de l'exercice 1.0.5, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 2.2.5.
Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 2.2.6.
On admet que, de même que dans l'exercice 1.0.5, la série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Que sait-on de plus ?

Exercice 2.2.7.
En reprenant le résultat de l'exercice 1.0.22, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n}$.

Théorème 2.2.8 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, version $\sim$, TRÈS UTILE)**.**
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$.

Alors, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, *i.e.* convergent ou divergent simultanément.

Démonstration.
Comme $\frac{u_n}{v_n} \to 1$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée, et à valeurs positives. Notons m et M respectivement un minorant et un majorant non nuls de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$: pour tout $n \geqslant 0$,

$$m \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant M.$$

On peut alors écrire, pour tout $n \geqslant 0$, $mv_n \leqslant u_n \leqslant Mv_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs (théorème 2.2.1) :

- ▷ si $\sum u_n$ converge, alors $\sum mv_n$ converge, donc, comme $m \neq 0$, $\sum v_n$ converge ;
- ▷ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum Mv_n$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc de même nature. □

Exercice 2.2.9.
Déterminer les natures des séries $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Théorème 2.2.10 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, version o)**.**
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.

Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration.
En notant $\alpha_n = \frac{u_n}{v_n}$, on a $\alpha_n > 0$ et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, à partir d'un certain rang n_0, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si $\sum v_n$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs (théorème 2.2.1), on en déduit que $\sum u_n$ est convergente. □

Exercice 2.2.11 (astuce du $\times n^2$)**.**
On rappelle que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Quelle est la limite de la suite de terme général $n^3 \mathrm{e}^{-n}$?

En déduire la nature de la série $\sum n\mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 2.2.12.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n}$? En déduire la nature de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

Remarque 2.2.13.
Le théorème 2.2.10 s'énonce aussi avec un O. Nous n'utiliserons pas cet énoncé, d'où son absence dans ce cours.

Remarque 2.2.14.
Les théorèmes précédents demandent de connaître les natures de certaines séries, que l'on pourrait appeler « séries étalons ». Deux telles séries sont au programme :

1. les séries géométriques ;
2. les séries de Riemann.

On comparera systématiquement les séries que l'on étudiera à l'un ou à l'autre de ces exemples.

Théorème 2.2.15 (exemple de Riemann)**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.
Si $\alpha = 1$, comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n}$ a même nature que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Or,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

On retrouve une série télescopique. Comme $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ aussi.

Si $\alpha < 1$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$, or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Si $\alpha > 1$, effectuons le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \frac{\alpha-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha-1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &= -\frac{\alpha-1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \\ &\sim -\frac{\alpha-1}{n^\alpha},\end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right).$$

Comme $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, par sommation télescopique, la série

$$\sum\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge aussi.

□

Remarque 2.2.16 (fonction ζ de Riemann)**.**
Si $\alpha > 1$, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Nous montrerons dans le chapitre sur les séries de Fourier que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.3 Comparaison série-intégrale

Théorème 2.3.1 (comparaison série-intégrale)**.** Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. Alors, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature, *i.e.* convergent ou divergent simultanément.

Démonstration.
Soit $n \geqslant n_0$. Par décroissance de f, on a :

$$\forall t \in [n, n+1],\ 0 \leqslant f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n).$$

Puis, par par croissance de l'intégrale sur $[n, n+1]$ (voir figure 1) :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \tag{1}$$

et par sommation (en utilisant la relation de Chasles), pour $n_0 \leqslant n \leqslant N-1$:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} f(n+1) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n)$$

ou encore

$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} f(n)\right) - f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\sum_{n=n_0}^{N} f(n)\right) - f(N).$$

En notant S_N la somme partielle d'ordre N de la série $\sum f(n)$, on peut noter cela (voir figure 2) :

$$S_N - f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_N - f(N). \tag{2}$$

Par positivité de f et de la suite $f(n)$, les deux suites $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

Si $\sum f(n)$ converge, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $S_N \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$, donc par (2) on obtient

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - f(N)$$

et comme $f(N) \geqslant 0$, on a

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

Soit $x \geqslant n_0$, il existe un entier N vérifiant $x \leqslant N$, et l'on a alors par positivité de f, et donc par croissance de $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

Par limite monotone, $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc par (2) on obtient

$$S_N \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Par limite monotone, $\sum f(n)$ converge. □

Remarque 2.3.2.
L'encadrement (2) est à rapprocher de la méthode des rectangles, vue dans le chapitre sur l'intégration (voir figure 2).

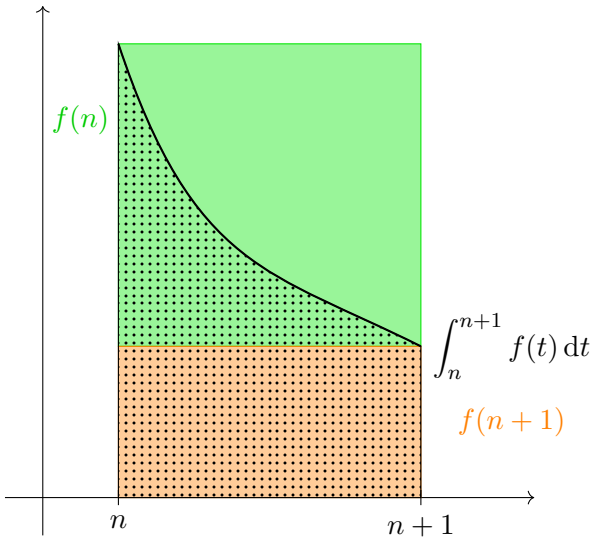


FIGURE 1 – Comparaison série-intégrale pour encadrer l'intégrale, sur un intervalle $[n, n+1]$.

Exercice 2.3.3.
En utilisant une comparaison série-intégrale, retrouver la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dans le cas $\alpha \geqslant 0$.

Que peut-on dire de simple dans le cas $\alpha < 0$?

Remarque 2.3.4 (voir figure 3)**.**
L'encadrement (1), représenté dans la figure 1, permet d'encadrer une intégrale (vue comme aire sous la courbe de f) entre deux aires de rectangles.

Sous réserve de validité, vis-à-vis des intervalles de définition, l'encadrement est équivalent à

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

qui est lui plus utile pour travailler sur le terme général d'une série.

On obtient ce dernier en majorant $f(t)$ pour $t \in [n, n+1]$, et en minorant $f(t)$ pour $t \in [n-1, n]$.

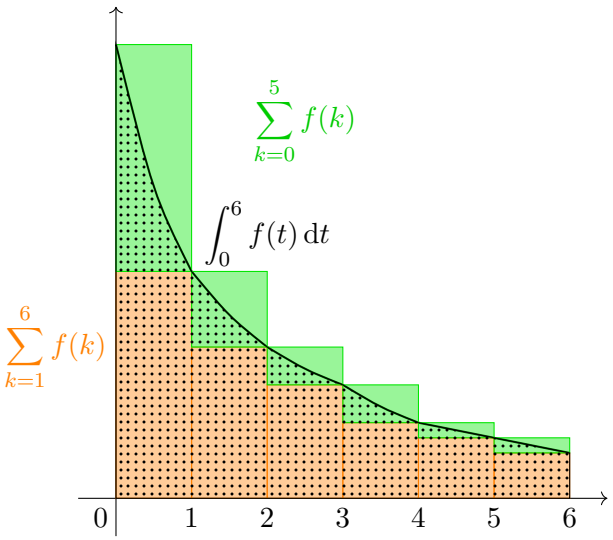


FIGURE 2 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction f décroissante, positive.

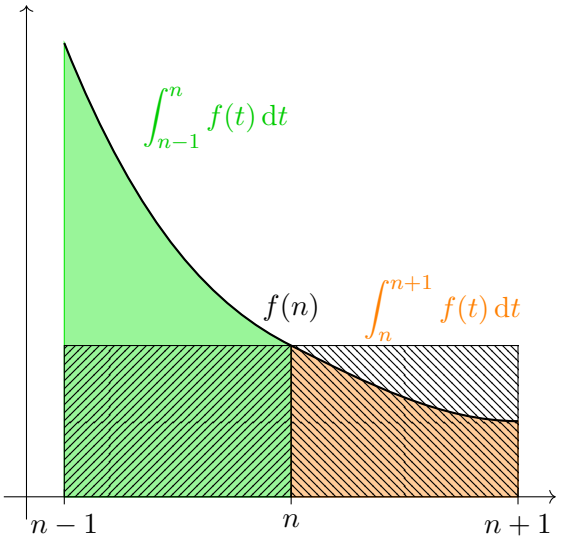


FIGURE 3 – Comparaison série-intégrale pour encadrer l'intégrale, sur un intervalle $[n, n+1]$.

Exercice 2.3.5.
Soit n, N, M des entiers vérifiant $2 \leqslant N < n \leqslant M$.

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, proposer un encadrement de $\dfrac{1}{n^2}$ par deux intégrales de la forme $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2}$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2.4 Règle de d'Alembert

Proposition 2.4.1 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

On a :

- ▷ si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge ;
- ▷ si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration.
Remarquons que l'on a $\ell \geqslant 0$ par passage à la limite.

Supposons que $\ell < 1$. Considérons $q \in]\ell, 1[$. Alors, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q.$$

Ainsi, si $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant q u_n$. Par récurrence simple, on montre aisément que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Comme (q^n) est une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$, la série $\sum q^n$ converge, donc par comparaison à une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Supposons que $\ell > 1$. À partir d'un certain rang, $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir d'un certain rang, donc ne peut converger vers 0. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement. □

Remarque 2.4.2.
Il faut garder en tête que cette règle reste muette dans le cas où $\ell = 1$ ou si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite, ce qui restreint fortement le nombre de situations où elle peut se montrer utile. Par exemple, on a $\ell = 1$ pour toutes les séries de Riemann, pourtant certaines sont convergentes et d'autres sont divergentes.

Remarque 2.4.3.
La règle de d'Alembert est adaptée à l'étude des séries dont le terme général est construit à partir de produits : factorielles, puissances, quotients par exemple.

Exercice 2.4.4.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$.

Exercice 2.4.5.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^{1515}}{n!}$?

Exercice 2.4.6.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n}{42^n}$?

Exercice 2.4.7.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^n}$.

3 Séries absolument convergentes

Dans cette partie, on s'intéresse à des séries à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce cas général, le comportement de la suite des sommes partielles peut être beaucoup plus compliqué que pour les séries à termes positifs : les sommes partielles peuvent avoir une limite finie, infinie, et même pas de limite du tout, et une simple majoration ne permet pas d'avoir suffisamment d'informations pour conclure.

Définition 3.0.1.
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque 3.0.2.
La série $\sum |u_n|$ est à termes positifs, donc on peut lui appliquer tous les résultats de la partie précédente.

Remarque 3.0.3.
Une série À TERMES POSITIFS converge si et seulement si elle converge absolument.

Remarque 3.0.4 (exemples de référence)**.**
Si $\alpha > 1$ la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge absolument.
Si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge absolument.

Exercice 3.0.5.
Les séries $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ sont-elles absolument convergentes ?

Théorème 3.0.6 (règle CVA⇒CV et inégalité triangulaire)**.**
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On suppose $\sum u_n$ absolument convergente. Alors $\sum u_n$ est convergente. De plus,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration (Admis)**.**

□

Exercice 3.0.7.
Montrer que $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$ est convergente.

Exercice 3.0.8.
Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exercice 3.0.9.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge.

Remarque 3.0.10.
L'implication réciproque n'est pas vraie en général : une suite peut être convergente sans être absolument convergente (on parle alors de série *semi-convergente*).

L'outil principal d'étude de telles séries est le théorème des séries alternées (voir la partie suivante)

Proposition 3.0.11.
Si $\sum u_n$, $\sum v_n$ sont deux séries qui convergent absolument, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge absolument.

Démonstration.
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ est convergente. Or, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$. Mais $\sum |\lambda||u_n|$ et $\sum |\mu||v_n|$ sont convergentes donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ l'est également. □

Exercice 3.0.12.
Montrer que la série $\sum \left(\dfrac{\sin(n)}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$ converge absolument

Exercice 3.0.13.
Si $\sum u_n$ est une série qui converge absolument et $\sum v_n$ est une série qui converge, sans converger absolument, que peut-on dire de $\sum(u_n + v_n)$?

4 Séries alternées

Théorème 4.0.1 (des séries alternées)**.**
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, décroissante, et telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, en notant S_N la somme partielle d'ordre N de la série $\sum(-1)^n u_n$,

$$S_{2N+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant S_{2N}.$$

Démonstration.
On montre que les suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S_{2N+1} - S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N}(-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+1} u_{2N+1} \\ &= -u_{2N+1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} &= S_{2N+3} - S_{2N+1} \\ &= \sum_{n=0}^{2N+3} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+3} u_{2N+1} + (-1)^{2N+2} u_{2N+2} \\ &= u_{2N+2} - u_{2N+3} \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

car la suite (u_n) est décroissante. Ainsi, $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De même,

$$\begin{aligned} S_{2(N+1)} - S_{2N} &= S_{2N+2} - S_{2N} \\ &= \sum_{n=0}^{2N+2} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+2} u_{2N+2} + (-1)^{2N+1} u_{2N+1} \\ &= u_{2N+2} - u_{2N+1} \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

car la suite (u_n) est décroissante. Ainsi, $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Ainsi, elles $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite, donc la suite (S_N) converge, donc la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

On obtient l'inégalité proposée immédiatement par adjacence (voir figure 4) :

- ▷ comme $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$, donc pour tout N :
$$S_{2N} \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n;$$
- ▷ comme $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$, donc pour tout N :
$$S_{2N+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n.$$

□

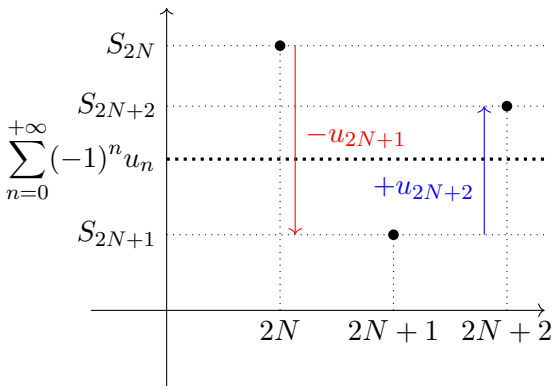


FIGURE 4 – Illustration de l'adjacence de $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et de $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$.

Remarque 4.0.2.
L'encadrement illustré par la figure 4 est fondamental. On le retrouve aisément grâce à cette figure.

On y voit notamment que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| S_N - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leqslant u_{N+1}.$$

Cet encadrement n'est pas au programme : vous devrez le redémontrer, au besoin.

Remarque 4.0.3.
Sous les hypothèses du théorème, on a toujours $u_n \geqslant 0$.

Exercice 4.0.4.
1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge.
2. En utilisant le théorème précédent, donner un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Quel est son signe ?
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{N+2}.$$

5 Schéma d'étude

Lorsque l'on étudie la nature d'une série numérique $\sum u_n$, on essaiera de suivre systématiquement les étapes suivantes.

1. Est-ce que le terme général u_n est positif ? Si ce n'est pas le cas, étudier la série $\sum |u_n|$, et utiliser l'argument de convergence absolue.
2. On se place dans le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif. On tentera dans l'ordre les manipulations suivantes.
   a) Déterminer un équivalent du terme général u_n, et retomber sur le terme général d'une série étalon. Cela permet de conclure.
   b) Si le terme général u_n est construit comme un produit ou un quotient, utiliser la règle de d'Alembert.
   c) Sinon, majorer $|u_n|$, en utilisant notamment les inégalités classiques ($|\sin(x)| \leqslant 1$, $|\cos(x)| \leqslant 1$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$, $\ln(1+x) \leqslant x$ notamment).
   d) Sinon, multiplier le terme général par n^α, avec un α bien choisi (souvent : $\alpha = 2$), pour utiliser une comparaison avec un o.
   e) Sinon, penser à utiliser une comparaison série-intégrale.
3. Si rien de cela ne fonctionne, penser à utiliser le théorème des séries alternées (cela se détecte souvent assez facilement).