TSI2 – Liste des exercices à savoir refaire

13 octobre 2026

1 Rappels et compléments d'intégration

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$.

▷ Déterminer une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

▷ Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\mathrm{d}u$ (en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, ou par linéarisation).

▷ Soit $n \geqslant 1$. Représenter la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[n, n+1]$. En proposant un encadrement judicieux, montrer que

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Simplifier ensuite le terme du milieu.

▷ Soit P un polynôme réel. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

▷ Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

▷ Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$ lorsque $\alpha > 0$.

▷ Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues, telles que

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$ diverge.

▷ En utilisant « l'astuce du $\times t^2$ », montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2 Compléments d'algèbre linéaire

▷ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $A^\top$ est inversible, et que $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

▷ Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,(A)$.

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - X - 2$.

Calculer $P(A)$, et en déduire que A est inversible.

3 Variables aléatoires finies

▷ Démonstration de la formule de Kœnig-Huygens.

▷ Démonstration de la formule de l'espérance de la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli.

▷ On lance n fois successivement un dé à six faces.

1. Modéliser ceci.
2. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier six au k^{e} lancer ?
3. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ?

▷ Démonstration de la formule de l'espérance et de la variance de la loi $\mathscr{B}(n, p)$, en utilisant $X_1 + \cdots + X_n$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathscr{B}(p)$.

4 Déterminants

▷ Soit le déterminant $n \times n$: $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$: $D_n = D_{n-2}$.

▷ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\det(A) \neq 0$ et que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

▷ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$.

5 Séries numériques

▷ Déterminer en fonction de $q \in \mathbb{C}$ la nature de la série géométrique $\sum q^n$, et établir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, en cas de convergence.

▷ Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, soit $p \in \mathbb{N}$. À partir de la formule donnant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, obtenir celle de $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} q^n$ par décalage d'indices.

▷ Règle CV+DIV=DIV : soit $\sum u_n$ une série convergente et $\sum v_n$ une série divergente. Montrer que la série $\sum (u_n + v_n)$ est divergente.

▷ Simplifier l'expression de $\ln(n+1) - \ln(n)$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

▷ Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$. On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.

▷ Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$. On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.

▷ Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$. On pourra bien entendu ensuite demander une application (simple) à l'étude de la nature d'une série.

▷ En utilisant une comparaison série-intégrale, retrouver la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dans le cas $\alpha \geqslant 0$.
Que peut-on dire de simple dans le cas $\alpha < 0$?

▷ Soit n, N, M des entiers vérifiant $2 \leqslant N < n \leqslant M$.

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, proposer un encadrement de $\frac{1}{n^2}$ par deux intégrales de la forme $\int_{\dots}^{\dots} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
2. En déduire un encadrement de $\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2}$.
3. En déduire un encadrement de $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

▷ 1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.
2. Donner un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Quel est son signe ?

6 Éléments propres

▷ Démontrer que, pour $A \in \mathscr{M}_(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X \} = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$.

▷ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Démontrer que $P(A)X = P(\lambda)X$.
On pourra admettre le lemme : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$ (sa démonstration peut aussi être demandée).

7 Intégrales généralisées

▷ Démontrer que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

▷ Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de l'exemple de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, par primitivation. On demandera de traiter un des trois cas : $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ ou $\alpha < 1$.

▷ En posant $t = \frac{1}{u}$ (ou $u = \frac{1}{t}$, au choix), retrouver la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. On suppose connue la nature de l'exemple de Riemann en $+\infty$.

8 Séries entières

▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

▷ On admet que la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Calculer $y'(x)$ et $y(0)$. En déduire une expression de $y(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▷ En utilisant un développement en série entière de $\mathrm{Arctan}'(t)$, déterminer un développement en série entière de $\mathrm{Arctan}(x)$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

9 Diagonalisation, trigonalisation

▷ Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable et a une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A = \lambda I_n$.

▷ Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PB^pP^{-1}$.

▷ Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

10 Fonctions vectorielles, courbes paramétrées

▷ Soit $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ dérivables. Démontrer la formule de dérivation donnant $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle f(t), g(t)\rangle)$.

▷ Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Démontrer la formule de dérivation donnant $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|f(t)\|^2\big)$.

▷ Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Démontrer la formule de dérivation donnant $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|f(t)\|)$.

11 Espaces euclidiens et préhilbertiens

▷ Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, soit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Développer par bilinéarité $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$.

▷ Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$, alors on définit sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ un produit scalaire par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

▷ Montrer que pour $a < b$ deux réels, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

▷ Démontrer que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ et que $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$.

▷ Soit $x \in E$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, si l'on écrit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, montrer que $\lambda_1 = \langle x, e_1\rangle$.

12 Probabilités sur un univers dénombrable.

▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n l'événement « le n-ième lancer donne un six », P_n l'événement « on obtient le premier six au n-ième lancer » et P_0 l'événement » on n'obtient aucun six ». On admet que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Calculer $P(P_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, puis $P(P_0)$.

▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n l'événement « le n-ième lancer donne un six », P_n l'événement « on obtient le premier six au n-ième lancer » et P_0 l'événement » on n'obtient aucun six ». On admet que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Si P_n est réalisé, on lance un dé à n faces, et l'on note Y le résultat de ce lancer de dé. Pour $n \geqslant 1$, donner $P_{P_n}(Y = 1)$. Écrire $P(Y = 1)$ sous la forme d'une somme de série.

▷ On réalise une succession de lancers d'un dé à six faces. Pour tout $n \geqslant 1$, on note D_n la variable aléatoire donnant le résultat du n^{e} lancer, et X le rang d'obtention du premier six. On admet que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X.

▷ On considère X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$. Si $X = n$, on effectue un pile ou face donnant pile avec probabilité $\dfrac{1}{5^{n-1}}$. On note $Y = 1$ si l'on a obtenu pile, et 0 sinon. Déterminer la loi de Y.

▷ Calcul de $P(X > a)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $a \in \mathbb{N}$, où $p \in]0, 1]$ (on notera $q = 1 - p$).

13 Équations différentielles

▷ Soit $A = PDP^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable, soit $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX$ si et seulement si $Y' = DY$.

14 Isométries vectorielles

▷ Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$.

- ▷ Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.
- ▷ Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
- ▷ Soit $A, B \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
- ▷ Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.